Μαθημα 26ο 1/6/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Γενικα σε 2ου βαθμου εξισωσεις

$$\underbrace{Ax^2+By^2+\Gamma z^2+\Delta xy+Exz+Zyz}_{q(x,y,z)}+Hx+Iz+\Theta y+K=0$$

Βημα 1ο

Θεωρουμε q (το μη-γραμμικο κομματι) και λυνουμε με μεθοδο τετραγωνικων μορφων

Βημα 2ο

Αντικατασταση των $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

Βημα 3ο

Συμπληρωση (τελεια) τετραγωνου (αναγνωριση επιφανειας)

Ασκηση 1

Να αναγνωριστει η επιφανεια $x^2-y^2-2z^2-2x-4y-12z-16=0$

Λυση

Θετω $q(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(*) Παρατηρηση: Αν η εξισωση επιφανειας στερειται ορων $xy/yz/xz \Rightarrow$ παμε στο 3ο Βημα

Κανω συμπληρωση τετραγωνων
Η εξισωση γινεται:

$$(x-1)^2 - 1^2 + (y-2)^2 - 2^2 - 2\,(z^2 + 2\cdot 3\cdot z + 3^2 - 3^2) - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 2\,(z+3)^2 = 16 + 4 + 1 - 18 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z-3)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Ειναι μονοχωνο υπερβολοειδες εκ περιστροφης της υπερβολης

$$\left\{ \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z+3)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \;,\; y = 2 \right\}$$ γυρω απο τον αξονα Oz

→ λεγαμε $y=0$

εδω $y-2=0 \Rightarrow y=2$

Ασκηση 2

Να αναγνωριστει η επιφανεια $x^2 - 2y^2 + 36y - z - 161 = 0$

Λυση

{ Οταν βλεπω x^2 και y^2 στο ενα μελος χωρις z^2 και z στο αλλο μελος το μυαλο μου παει σε παραβολοειδες }

Στερειται ορους τα επιμερους γινομενα αρα κανω συμπληρωση τετραγωνου

$$x^2 - 2\,(y^2 - 2\cdot 9y + 9^2 - 9^2) = z + 161 \Rightarrow x^2 - 2\,(y-9)^2 = z + 161 - 162 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{(y-9)^2}{(1/\sqrt{2})^2} = z - 1$$

Αρα εχω υπερβολικο παραβολοειδες με κορυφη $K'(0,9,1)$ παραλληλη προς τον Oz

Ασκηση 3

Να αναγνωριστει (σχεδιαστει προσεγγιστικα) η επιφανεια

$x^2+y^2+z^2-4yz+3x+2y=0$

Λυση

Θεωρουμε την τετραγωνικη μορφη $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τυπο

$q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4yz$ οπου

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{οπου } q(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Παιρνω το χαρακτηριστικο πολυωνυμο

$$P_A=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-(-2)^2\right]=$$

$$=(1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2)=(1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)$$

Αρα ιδιοτιμες $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-1$

Ευρεση P (αρα ιδιοδιανυσματα → ορθογωνια → κανονικα)

$$V(1)=\begin{cases} \text{———} \\ -2z=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow y=z=0,\ x=\kappa\ (\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow V(1)=\left\{\begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \kappa\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \kappa\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$V(3) = \begin{cases} -2x=0 \\ -2y-2z=0 \\ -2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=-k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(-1) = \begin{cases} 2x=0 \\ 2y-2z=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

{ Ρίζες απλές ⇒ τα ιδιοδιανύσματα ορθογ. }

Κανονικότητα

$$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0)$$

$$\lambda_2 = 3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$\lambda_3 = -1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ωστε $P^t A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x,y,z) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 = (x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2$

$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4yz$ $(+3x+2y)$ αρα η επιφανεια γινεται
$(x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2 + 3x + 2y = 0$ οπου

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ \sqrt{2}/2 \cdot y' + \sqrt{2}/2 \cdot z' \\ -\sqrt{2}/2\, y' + \sqrt{2}/2\, z' \end{bmatrix}$

Συνεπως $x = x'$

$y = \sqrt{2}/2 \cdot y' + \sqrt{2}/2 \cdot z'$

$z = -\sqrt{2}/2 \cdot y' + \sqrt{2}/2 \cdot z'$

και ετσι: $(x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2 + 3x' + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'\right) = 0$

$\Rightarrow (x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2 + 3x' + \sqrt{2} \cdot y' + \sqrt{2}\, z' = 0 \Rightarrow$

τωρα κανω συμπληρωση τετραγωνων κι ετσι εχω $\Rightarrow$

$(x')^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} x' + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left((y')^2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} y' + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2\right) -$

$- \left((z')^2 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} z' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x'+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2-3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2-\left(z'-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow \left(x'+\frac{3}{2}\right)^2+3\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2-\left(z'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{23}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{(x'+3/2)^2}{\left(\sqrt{23/12}\right)^2}+\frac{(y'+\sqrt{2}/6)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{23/12}\right)^2}-\frac{(z'-\sqrt{2}/2)^2}{\left(\sqrt{23/12}\right)^2}=1$$

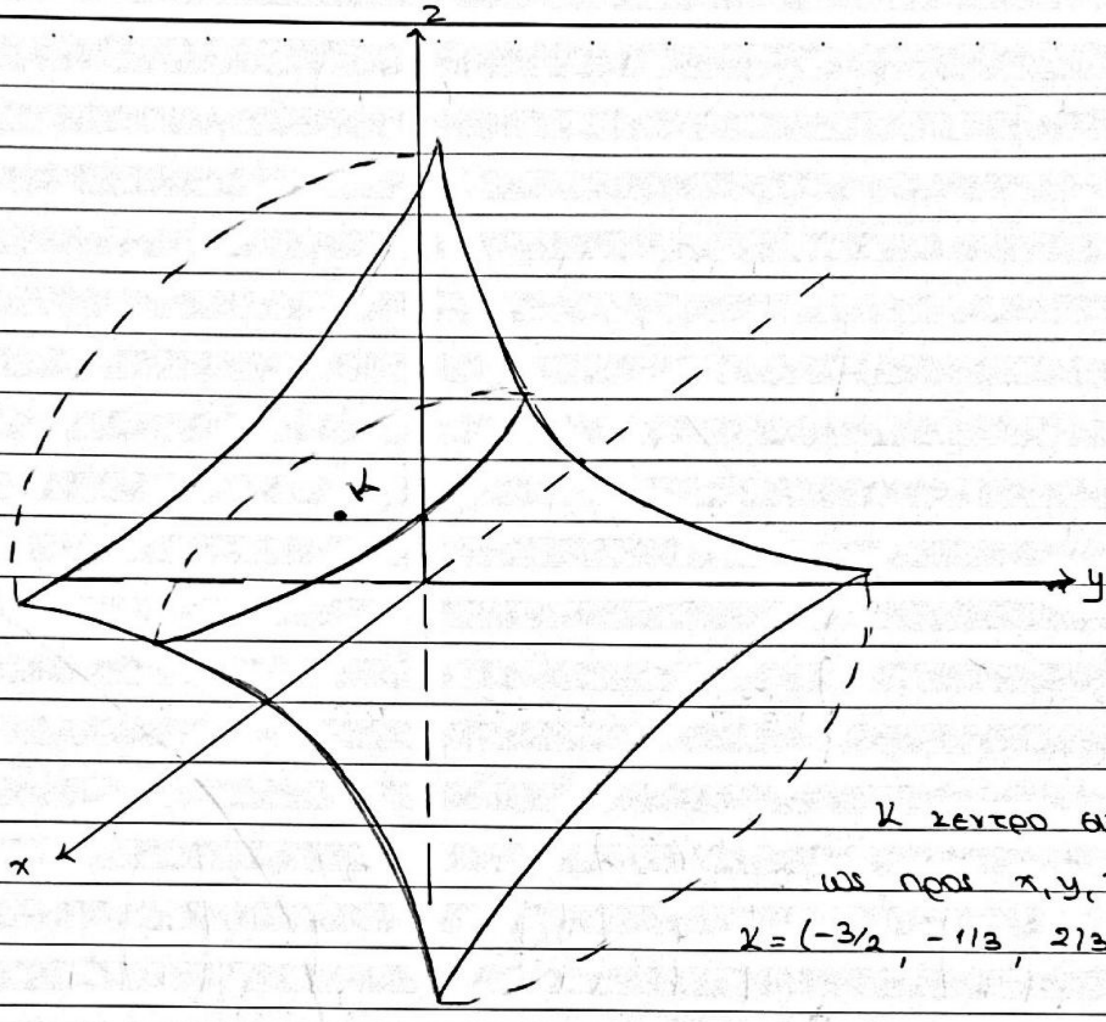
Μονοχωνο υπερβολοειδες με κεντρο συμμετριας το
$K'\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ με αξονα Oz'

{ Παντα αναφερω κεντρο συμμετριας και αξονα }

$\Rightarrow$ Προσδιορισμος κεντρου συμμετριας στο $Oxyz$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} -3/2 \\ -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{K \text{ ως προς } x',y',z'}=\underbrace{\begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}}_{K \text{ ως προς } x,y,z}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right\}$$



K κεντρο συμμετριας
ως προς x, y, z
$K = (-3/2, -1/3, 2/3)$

Ασκηση 41
Να αναγνωρισθει η $x^2-2xy+2xz+4x-y-2z-1=0$
Λυση
Θεωρουμε την $q(x,y,z)=x^2-2xy+2xz$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$A = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

οπου $q(x) = (x \;\; y \;\; z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

A συμμετρικός $\Rightarrow \exists P$ ορθογ ώστε $P^t A P = \Delta$

Ιδιοτιμές

$$P_A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 + 2\lambda = \lambda\left((1-\lambda)\cdot\lambda + 2\right) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2-\lambda-2) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

Άρα ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ (απλές)

• $V(0) = \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z=\kappa \end{cases}, \ \kappa \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \\ \kappa \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

• $V(2) = \begin{cases} -x-y+z=0 \\ -x-2y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ $\oplus$ κατά μέλη $\Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \xrightarrow[\kappa \in \mathbb{R}]{z=\kappa} \begin{cases} x = 2\kappa \\ y = -\kappa \\ z = \kappa \end{cases}, \ \kappa \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\kappa \\ -\kappa \\ \kappa \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\bullet V(-1) = \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases} \xRightarrow[\kappa \in \mathbb{R}]{z=\kappa} \begin{cases} x = -\kappa \\ y = -\kappa \\ z = \kappa \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\kappa \\ -\kappa \\ \kappa \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Κανονικοποίηση

$\vec{\varepsilon}_1 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$, $\vec{\varepsilon}_3 = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad P^t A P = \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q(x, y, z) = 0\,(x')^2 + 2(y')^2 - (z')^2$$

Η επιφάνεια γίνεται $2(y')^2 - (z')^2 + 4x - y + 2z - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{1}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z' \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x' \\ \to y' \\ \to z' \end{matrix}$$

Άρα η επιφάνεια:

$$2(y')^2-(z')^2+4\left(\frac{2}{\sqrt6}y'-\frac{1}{\sqrt3}z'\right)-\left(\frac{\sqrt2}{2}x'-\frac{1}{\sqrt6}y'-\frac{1}{\sqrt3}z'\right)+$$

$$+2\left(\frac{\sqrt2}{2}x'+\frac{1}{\sqrt6}y'+\frac{1}{\sqrt3}z'\right)-1=0 \quad \Rightarrow \underset{\text{τετραγώνου}}{\overset{\text{συμπλήρωση}}{\cdots}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(y'+\frac{11}{4\sqrt6}\right)^2-\left(z'+\frac{1}{2\sqrt3}\right)^2=-\frac{\sqrt2}{2}x'+1+2\cdot\frac{11\cdot 11}{4\cdot4\cdot6}-\frac{1}{4\cdot3}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y'+\frac{11}{4\sqrt6}\right)^2}{(1/\sqrt2)^2}-\frac{\left(z'+\frac{1}{2\sqrt3}\right)^2}{1^2}=-\frac{\sqrt2}{2}(x'-z_0)$$

Επίφωση υπερβ. παραβ. με άξονα τα Ox

Άσκηση 5

Να αναγνωριστεί (σχεδιαστεί) η επιφάνεια

$$2x^2+y^2+z^2-2yz-4x+2y-2z+1=0$$

Λύση

Θεωρούμε $q(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-2yz$, $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \Big/ \; q(x,y,z)=(x\ y\ z)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Παίρνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$P_A=\lambda(\lambda-2)^2$ άρα ιδιοτιμές $\lambda_1=0$ (απλή), $\lambda_2=2$ (διπλή)

↳ μάλλον Gram-Schmidt

$V(0) = \left\{ \ldots\ldots = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$

$V(2) = \left\{ \ldots\ldots = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$

Παρατηρουμε οτι ειναι Γρ. Ανεξ και ορθογωνια μεταξυ τους αρα δεν χρειαζεται Gram Schmidt

Κανονικοποιηση

$\vec{\varepsilon}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$\vec{\varepsilon}_2 = (1, 0, 0)$

$\vec{\varepsilon}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ οπου $P^t A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow q(x, y, z) = 0\,(x')^2 + 2\,(y')^2 + 2\,(z')^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} z' \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x' \\ \to y' \\ \to z' \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Η επιφάνεια γίνεται

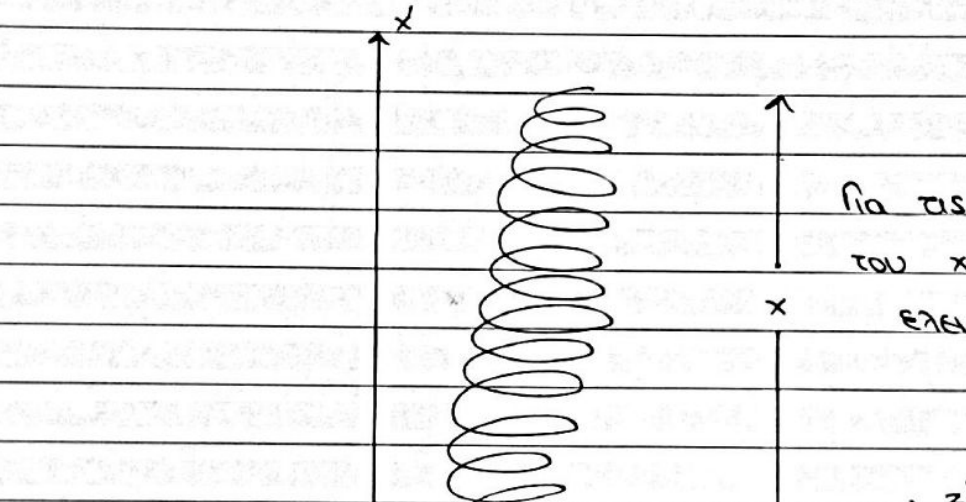
$$2(y')^2 + 2(z')^2 - 4y' + \sqrt{2}\,x' + \sqrt{2}\,z' - \sqrt{2}\,x' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y')^2 + 2(z')^2 - 4y' + 2\sqrt{2}\,z' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left((y')^2 - 2\cdot 1\cdot y' + 1^2 - 1^2\right) + 2\left((z')^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}z' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y'-1)^2 + 2\left(z' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1 + 1 + 2 \Rightarrow$$ Το x δεν είναι 0 είναι ελεύθερο!

$$(y'-1)^2 + (z' - \sqrt{2}/2)^2 = 1$$



Για τις διάφορες τιμές του x το οποίο είναι ελεύθερο

Ένας κυκλικός κύλινδρος με γενέτειρες // Ox'

Τέλος